過去問に挑戦！　２次関数

問　題（一般曹候補生過去問より）

$y = ax^2 - 4x + b$ の頂点が(1,　5) のとき、a と b の値の組み合わせとして、次のうち正しいものはどれか。

(1)　$a = -4$,　$b = 7$
(2)　$a = -2$,　$b = 3$
(3)　$a = 1$,　$b = 5$
(4)　$a = 2$,　$b = 7$
(5)　$a = 4$,　$b = 5$

解答例

$y = ax^2 - 4x + b \cdots$ ①
頂点(1,　5) より
$y = a(x-1)^2 + 5$ とかける。
$y = a(x^2 - 2x + 1) + 5$
$\quad = ax^2 - 2ax + a + 5$
これと①が同じ式を表すので

$$\begin{cases} -4 = -2a & \cdots ② \\ b = a + 5 & \cdots ③ \end{cases}$$

②,　③より　$a = 2$,　$b = 7$

以上より、答えは（4）

ポイント

はじめに①のように式が与えられると、①式を使って

$$y = ax^2 - 4x + b$$
$$= a\left(x^2 - \frac{4}{a}x\right) + b$$
$$= \cdots \cdots$$

としたくなります。勿論、このようにしても答えは出るのですが、式変形が大変です。計算ミスも起こりやすくなります。
さて、２次関数には以下に示す３つの基本形があります。

〈ア〉 $y = ax^2 + bx + c$
〈イ〉 $y = a(x-p)^2 + q$　→　頂点 (p, q)
〈ウ〉 $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$　→ x 軸との交点（α, 0), (β, 0)

本問は、頂点の座標が与えられていますので、〈イ〉のタイプの問題となります。
つまり、$y = a(x-1)^2 + 5$ とおくことで、その後の流れがスムースになっていきます。

※２次関数には３つの型があることを覚えておこう！